Soluções EN2019

I

1. $senx.\log t - t + \dfrac{x^3}{3} = 8$

2. **a)**
$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 2t & 1 & 7t+t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} x_1(t) = (1-t)e^t \\ x_2(t) = (1-5t-t)^2 e^t \\ x_3(t) = -e^t \end{cases}$$

b) Não existem condições iniciais que possibilitem a solução ser uma função limitada sem ser nula. Para quaisquer valores das c.i. não simultaneamente nulos, a solução tende para infinito.

3. **a)**
$$\overline{x(t)} = 1 \text{ é um escoadouro, assintoticamente estável}$$
$$\overline{x(t)} = -2 \text{ é uma fonte, instável}$$

b) Teremos de considerar 3 PVIs relativos ao valor de x_0.

- $\begin{cases} x' = -x^2 - x + 2 \\ x(0) = -2 \end{cases}$, tem como solução única $x(t) = -2$ que é uma solução instável
- $\begin{cases} x' = -x^2 - x + 2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$, tem como solução única $x(t) = 1$ que é uma solução assintoticamente estável
- $\begin{cases} x' = -x^2 - x + 2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ com $x_0 \neq -2{,}1$. Sendo a equação autónoma poderá ser resolvida pelo método das variáveis separáveis, ou através da mudança de variável própria de uma equação de Riccati, e para o efeito

tome-se como solução particular conhecida, uma qualquer das soluções de equilíbrio. A solução única do PVI é $x(t)=\dfrac{3}{1-\left|\dfrac{x_0-1}{x_0+2}\right|e^{-3t}}-2$,

e tem-se $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=1$.

II

a) $x_{n+2}+(\alpha-\beta)x_{n+1}-(\alpha\beta+\gamma)x_n=0$ EDF linear, de 2ª ordem sse $\alpha\beta+\gamma\neq 0$

b) $y_n=-3-\dfrac{1}{C_1+nC_2}$, com $C_1, C_2 \in \Re$ e não simultaneamente iguais a 0

III

a) Pelo Teorema de Cauchy, o valor do integral é 0. Verificam-se as hipóteses do teorema,

- as singularidades $z=0 \vee z=i \vee z=2i$ encontram-se no exterior da curva de Jordan regular $|z-2|=1$

- a função integranda é holomorfa no simplesmente conexo $\Omega=\left\{z\in C: |z-2|<\dfrac{3}{2}\right\}$ que contém a curva

b) Pelas Fórmulas Integrais de Cauchy com $n=0$,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz .$$

Por definição de integral de linha,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{it}\right)}{z_0+re^{it}-z_0}\,ire^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dt\,,$$

obtendo-se assim o resultado que se pretende provar e que é conhecido por Teorema do Valor Médio.